

গণনার কিছু কৌশল

উৎসর্গ

আমার আত্মীয়স্বজনদের মধ্যে যারা আমার বই পড়ার বা কেনার সময়
পান না। সবারই শুধু নাম দিয়ে দিলাম পাশে সম্পর্ক দিলাম না বলে রাগ
করবেন নাকি?

অনিমিখ সরকার, সঞ্জয় মৌমিতা, এইচ কে সরকার, মৃদুলা সরকার,
স্বপন কুমার ঢালী, যুথী রাণী মন্ডল, সবুজ সরকার, সৃষ্টি, অনিন্দ্য,
মধুসূদন সরকার, সুরবালা, রামকৃষ্ণ, শিল্পী, শাওন, রশ্মি, জয়ন্ত, নীলাভ্র,
পুতুল, পুষ্প, কাজল, সুদেব, অসীম, পপি, জুয়েল, কেয়া, রমেন্দ্র সূতার,
রেনুবালা, রনজিৎ, বিথি, তপন, সঞ্জিতা, প্রদীপ, বিউটি, বৃষ্টি, সৃষ্টি, তুষার,
তৃষ্ণা, প্রমি, প্রাচী, প্রিন্স,

লেখকের কথা

বইতে কী আছে সেটা পাঠক পড়লেই জানতে পারবে। এখন কিছু কথা এর বাইরে বলি। গণিতের বইতে লেখকের কথা এই অংশ বাদে বাকি কিছুই নিজের মতো লিখতে পারে না। তাই নিজের কিছু কথা বলি।

আমি যখন জাতীয় ক্যাম্পে অংশগ্রহণ করি তখন আমি পাঠ্য বইয়ের বাইরে আর কোনো বই অলিম্পিয়াডের জন্য আছে সেটাই জানতাম না। কিন্তু আমার সাথে যারা ছিল তারা অনেক কিছু আগে থেকেই জানত। ঐ সময় সুবিন ভাই কম্বিনোটরিক্স ক্লাশ নিয়েছিলেন। মোটামুটি তখনই আমার কম্বিনোটরিক্সে ভালো লাগা কাজ করে। ফলে আমার তখনই ইচ্ছা ছিলো আমি সাধারণ ছেলে-মেয়েদের জন্য বাংলায় কিছু লিখব।

এরপর আমার একসময় ইচ্ছা হলো ভিডিও লেকচার তৈরি করব, এজন্য গণনাবিদ্যা, সংখ্যাতত্ত্ব বা বীজগণিত নিয়ে বেশ কিছু লেকচার স্ক্রিপ্ট তৈরিও করে ছিলাম। কিন্তু এডিট করা বা ক্যামেরা সেটাপ করার মতো অবস্থা কখনও হয়নি। সাথে সময় আর কিঞ্চিৎ টাকা পয়সার সঙ্কট তো আছেই। এরপর আমি অনেকগুলো স্ক্রিপ্ট তৈরি করেছি। এরমধ্যে গণনাবিদ্যার ওপর যা যা লেকচার দেয়ার জন্য রেডি করছি তার পাঁচ ভাগের একভাগের মতো এই বইয়ে লিখলাম। যেমন এই সিরিজের পরের খণ্ডগুলোতে সম্ভাবনা, প্যাসকেলের ত্রিভুজ, দ্বিপদী উপপাদ্য, বাড়তি কমতির গল্প, আমের সংখ্যা আঁটির সংখ্যার সমান, কবুতরের খোঁপের নীতি, গাণিতিক আরোহ, রিকার্সন ইত্যাদি আরও অনেক বিষয় নিয়ে লিখব। আরও ৫-৬ টা বই লিখতে হবে পুরোটা তোমাদের জানাতে। এর বাইরে সংখ্যাতত্ত্ব, বীজগণিতের উপর আরও লেখার মতো টপিক রেডি আছে। কখনও যদি সময় আর রুমের সেটাপ করতে পারি তাহলে অনলাইন ক্লাশ আয়োজন করব নয়তো বই লিখব। এর সাথে আমি আরও রেডি করেছি রসায়ন বা জীববিজ্ঞানের যতটুকু মৌলিক জ্ঞান একজন শিক্ষার্থীর

উচ্চ মাধ্যমিকে ওঠার আগেই জানা উচিত তার বিশাল এক পাণ্ডুলিপি। এছাড়া গাছপালা, পোকামাকড় যাতে সবাইকে চিনিয়ে দেওয়া যায় সেই ধরনের লেখার কাজও করে রেখেছি। বিশ্ব রাজনীতি সম্পর্কে কিছুটা জানার জন্য হলেও বিশ্ব ইতিহাসও জানা দরকার। সেগুলোও রেডি করে রেখেছি। শুধু সময় আর সেটাপের অপেক্ষা। ক্লাশ বাংলা ও ইংরেজি উভয় মাধ্যমের জন্যই করব। আর ভিডিও বানাতে শুধু বাংলা। তার সাথে আরও বেশি অপেক্ষা তোমরা এই সব বিষয় জানতে চাও কি না। আর তোমাদের পরামর্শ নেওয়ার জন্য dipubookreview@gmail.com মেইল অ্যাড্রেসটা রাখলাম। (হয়তো নিয়মিত চেক করা হবে না, তবুও কোনো ভুল পেলে বা পরামর্শ দেয়ার জন্য হলেও।)

এক সময় স্বপ্ন দেখতাম গণিত শিখানোর জন্য কোনো এক স্টার্টাপ করব। আমি করার সুযোগ না পেলেও কয়েকজন মিলে **Banglar Math** নামে কাজ শুরু করেছে। Bangladesh Mathematical Olympiad-এর পেইজ, Learn with Pavel, মো: তুরাব হক পায়েলও নিয়মিত কাজ করছে। ওদের জন্য শুভ কামনা রইলো। এক সময় ইচ্ছা হয়েছিল গণিত আর বিজ্ঞান নিয়ে টিভি শো করব (যার স্ক্রিপ্টও লেখা আছে)। হয়তো কখনও শুরু হবে।

এক সময় কিছু ছোটগল্প লিখতাম ভাবছি সেগুলোও পাবলিশ হবে...। কত কিছু যে করার ইচ্ছা হয় কিন্তু কবে করব?

দিপু সরকার

সূচিপত্র

অধ্যায় ১ : গণনা কত সহজ	১১
অধ্যায় ২ : গাণিতিক গণনা (যোগ এবং বিয়োগ)	২৫
অধ্যায় ৩ : গুণ করে গণনা করা	৩৮
অধ্যায় ৪ : বিন্যাস	৫১
অধ্যায় ৫ : কেস অনুসারে ভাগ করে গণনা	৬৩
অধ্যায় ৬ : পরিপূরক গণনা (Complementary Counting)	৮২
অধ্যায় ৭ : গঠনমূলক গণনা (Constructive Counting)	৮৮
অধ্যায় ৮ : শর্তাধীন গণনা	৯৬
অধ্যায় ৯ : বেশি গুণে ফেলা	১২২
অধ্যায় ১০ : জোড়ায় জোড়ায় গণনা	১২৭
অধ্যায় ১১ : প্রতিসাম্যের গণনা	১৩২
অধ্যায় ১২ : কমিটি গঠন	১৪৮
অধ্যায় ১৩ : ছক কাগজের ঝামেলা	১৭০
অধ্যায় ১৪ : কমিটি নিয়ে আরও সমস্যা	১৭৩
অধ্যায় ১৫ : পার্থক্যকরণ	১৮০
অধ্যায় ১৬ : চ্যালেঞ্জিং কিছু সমস্যা	২০৬

অধ্যায় ১

গণনা কত সহজ

শুরুর কথা

এই অধ্যায়ে আমরা শিখব কিভাবে সঠিকভাবে গণনা করতে হয়। হয়তো তোমার মনে হতে পারে, “গণনা করতে তো আমি জানি! এক, দুই, তিন, চার...”। কিন্তু বাস্তবে গণনার সমস্যাগুলো প্রায়ই এই সাধারণ গণনার চেয়ে অনেক বেশি জটিল হয়। কেন জানো? কারণ আমাদের কেবল সংখ্যা গুনলেই হয় না, আমাদের জানতে হয় কীভাবে সেগুলো গোনা হবে, কেন গোনা হবে এবং কোন কৌশল ব্যবহার করতে হবে।

ধরো তুমি একটি বড় তালিকা করতে চাচ্ছে। এখানে শুধুমাত্র একের পর এক সংখ্যা বললেই কাজ শেষ হবে না। আমাদের প্রথমে জানতে হবে আমরা আসলে কী গুনছি এবং কিভাবে সেগুলো গোনা যায়। এজন্য আমাদের কিছু গণনার কৌশল শিখতে হবে যা আমাদের জটিল সমস্যার সমাধান করতে সাহায্য করবে।

গণনা করতে হলে আমাদের যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগের ধারণা পরিষ্কারভাবে জানতে হবে।

যদি তুমি জানো কিভাবে এই চারটি গাণিতিক ক্রিয়াগুলো করতে হয় এবং কখন এগুলো ব্যবহার করতে হবে, তাহলে তুমি যেকোনো গণনার সমস্যা সহজে সমাধান করতে পারবে। আমাদের বইয়ে আমরা তোমাকে অনেক ধরনের কৌশল শিখাবো যা তোমাকে বিভিন্ন ধরনের সমস্যায় সাহায্য করবে।

এই কৌশলগুলো শিখে রাখলে, তুমি যখন গণনার সমস্যায় পড়বে, তখন চিন্তা করতে হবে না, “এখন কি করব?”। বরং তুমি কৌশল প্রয়োগ করে সমস্যার

সমাধান করতে পারবে। ধরো, তোমার কাছে একটি সংখ্যা তালিকা আছে : 1, 2, 3, ..., 18। তুমি কতগুলো সংখ্যা আছে তা গুণতে চাও। এটি হয়তো সহজ মনে হতে পারে, কিন্তু বড় তালিকায় এমন সমস্যাগুলো জটিল হয়ে উঠতে পারে। এই বইয়ে আমরা শিখব কিভাবে সহজে এবং দ্রুত সঠিকভাবে গণনা করা যায়।

প্রশ্ন ১ : আমাদের একটি সংখ্যা তালিকা দেওয়া হয়েছে। তালিকাটি হলো : 1, 2, 3, 4, ..., 18 তালিকায় কতগুলো সংখ্যা আছে?

সমাধান : এই সমস্যাটি খুবই সহজ। আমাদের যা করতে হবে তা হলো এই তালিকায় থাকা সংখ্যাগুলো গুণে দেখা। কিন্তু এটি করার সময় একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো, আমরা নিশ্চিত হতে চাই যেন কোনো সংখ্যা বাদ না পড়ে। কিভাবে গুণবো?

আমরা তালিকার প্রথম সংখ্যা থেকে শুরু করব, যা হলো 1। এরপর আমরা একে একে সংখ্যা গুণবো : 1, 2, 3, 4, ..., 18 পর্যন্ত। আমরা গুণে দেখি যে এখানে মোট 18টি সংখ্যা আছে।

তালিকায় মোট সংখ্যা রয়েছে 18টি। এই সমস্যা সমাধানটি খুবই সহজ ছিল, তাই এটি আমাদের গণনার দক্ষতার প্রথম ধাপ।

সমস্যা ২ : তালিকার সংখ্যাগুলো : 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29। এখানে প্রশ্ন হলো : “7 থেকে 29 পর্যন্ত কতগুলো সংখ্যা আছে?” এটি একটি ইনক্লুসিভ গণনা, যার মানে হলো, 7 এবং 29 সংখ্যাগুলোও গণনায় ধরা হবে।

সমাধান

এখন আমরা কয়েকটি উপায়ে এটি সমাধান করতে পারি।

প্রথম উপায় : সরাসরি গণনা

আমরা এক এক করে সংখ্যা গুলো গুণতে পারি। অর্থাৎ : 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29।

গুণলে দেখা যায়, এখানে মোট 23টি সংখ্যা আছে।

আরেকটু বুদ্ধি করে সমাধান

এখন, আমরা সমস্যাটিকে আরও সহজভাবে সমাধান করতে পারি। প্রতিটি সংখ্যা থেকে 6 কমিয়ে নতুন একটি তালিকা তৈরি করা যাক:

মূল সংখ্যা	6 কমানো	নতুন সংখ্যা
7	- 6	1
8	- 6	2
9	- 6	3
...
29	- 6	23

এইভাবে, আমরা একটি নতুন তালিকা তৈরি করেছি যেখানে সংখ্যা গুলো 1 থেকে শুরু করে 23 পর্যন্ত গেছে। এখানে সংখ্যাগুলোর মান কমেছে কিন্তু মোট সংখ্যার পরিমাণ কমেনি তাই, মোট সংখ্যা হলো 23টি।

তৃতীয় উপায় : সহজ সূত্র ব্যবহার (কতগুলো ক্রমিক সংখ্যার ক্ষেত্রে মোট সংখ্যা বের করার জন্য সূত্র ব্যবহার করা যায় এর প্রমাণ একটু পরেই বের করা যাবে)

আরও সহজভাবে করতে আমরা একটি ছোট সূত্র ব্যবহার করতে পারি :

$$\text{মোটসংখ্যা} = \text{শেষসংখ্যা} - \text{প্রথমসংখ্যা} + 1$$

এখানে:

$$\text{প্রথম সংখ্যা} = 7, \text{শেষ সংখ্যা} = 29$$

$$\text{তাহলে, মোটসংখ্যা} = 29 - 7 + 1 = 23$$

এইভাবে আমরা নিশ্চিত হতে পারি যে 7 থেকে 29 পর্যন্ত মোট 23টি সংখ্যা আছে।

যখন একটি বড় বা জটিল সমস্যা আসে, চেষ্টা করো সেটিকে সহজে ভেঙে ফেলতে। যেমন এই উদাহরণে, আমরা সংখ্যা গুণতে গুণতে দেখেছি, কিন্তু সূত্র ব্যবহার করে সহজে সমাধান করতে পেরেছি।

ইনক্লুসিভ গণনা : যখন আমরা "7 থেকে 29 পর্যন্ত" বলি, তখন 7 এবং 29 দুইটিই ধরা হয়।

সহজীকরণ : বড় সমস্যাকে ছোট ছোট অংশে ভাগ করে সমাধান করা অনেক সময় সহজ হয়।

সমস্যা ৩ : দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা a এবং b দেওয়া আছে, যেখানে $b > a$ প্রদত্ত হলো, a এবং b এর মধ্যে (ইনক্লুসিভ) কতগুলো সংখ্যা আছে তার জন্য একটি সূত্র খুঁজে বের করতে হবে।

সমাধান

এখানে a হলো প্রথম সংখ্যা এবং b হলো শেষ সংখ্যা। "ইনক্লুসিভ" মানে, a এবং b দুইটিই গণনায় অন্তর্ভুক্ত হবে। আমরা সমস্যাটি আরও সহজ করতে পারি যদি a থেকে $a-1$ বাদ দিই। এইভাবে, আমাদের নতুন সংখ্যা শুরু হবে 1 থেকে। এভাবে প্রতিটি পদ থেকে $a-1$ বাদ দিয়ে দেখি। নিচে এটি বোঝানোর জন্য একটি টেবিল দেওয়া হলো:

মূল সংখ্যা	$a-1$ বাদ দেওয়া হলো	নতুন সংখ্যা
a	$a-(a-1)$	1
$a+1$	$a+1-(a-1)$	2
$a+2$	$a+2-(a-1)$	3
...
b	$b-(a-1)$	$b-a+1$

এইভাবে, নতুন তালিকার সংখ্যা শুরু হলো 1 থেকে এবং শেষ হলো $b - a + 1$ এ।

তাহলে, মূল তালিকায়ও মোট সংখ্যা হবে : $b - a + 1$

উত্তর : মোট সংখ্যা : $b - a + 1$

কখনও কখনও বড় সমস্যাকে ছোট করে ভেঙে সমাধান করা সহজ হয়।

যেমন এই সমস্যায়, আমরা প্রথমে a থেকে $a-1$ বাদ দিয়েছি, ফলে

তালিকাটি 1 থেকে শুরু হয়েছে। এইভাবে, আমরা সহজে মোট সংখ্যা গণনা করতে পেরেছি।

যখন a থেকে b পর্যন্ত পূর্ণ সংখ্যার পরিমাণ গণনা করতে হবে, তখন $b - a + 1$ সূত্রটি মনে রাখো।

সমস্যা ৪ : তালিকায় কতগুলো সংখ্যা আছে? তালিকাটি হলো : 36, 37, 38, ..., 92, 93

সমাধান : এখানে প্রথম সংখ্যা হলো 36 এবং শেষ সংখ্যা হলো 93।

আমাদের জানতে হবে, এই তালিকায় মোট কতগুলো সংখ্যা রয়েছে। আমরা সংখ্যা গুণে বের করতে পারি, অথবা একটি সহজ সূত্র ব্যবহার করতে পারি।

সূত্রটি হলো : $b - a + 1$

এখানে:

- a হলো প্রথম সংখ্যা = 36
- b হলো শেষ সংখ্যা = 93

তাহলে, সূত্র অনুযায়ী : $b - a + 1 = 93 - 36 + 1 = 58$ টি সংখ্যা আছে।

সমস্যা ৫ : তালিকা 4, 6, 8, ..., 128, 130 এখানে আমাদের জানতে হবে এই তালিকায় মোট কতগুলো সংখ্যা আছে।

সমাধান : প্রথমে, আমরা লক্ষ করি যে এই তালিকার প্রতিটি সংখ্যা 2 এর একটি গুণিতক।

ধাপ ১ : প্রতিটি সংখ্যা 2 দিয়ে ভাগ করা

যেহেতু প্রতিটি সংখ্যা 2 এর গুণিতক, তাই আমরা প্রতিটি সংখ্যাকে 2 দিয়ে ভাগ করি:

$$4 \div 2 = 2$$

$$6 \div 2 = 3$$

$$8 \div 2 = 4$$

$$\dots$$
$$128 \div 2 = 64$$
$$130 \div 2 = 65$$

তাহলে নতুন তালিকাটি হলো : 2, 3, 4, ..., 64, 65

ধাপ ২ : মোট সংখ্যা গণনা করা

এই তালিকাটি শুরু হয়েছে 2 থেকে এবং শেষ হয়েছে 65 এ। সুতরাং,

এখানে মোট সংখ্যা হলো : $65 - 2 + 1 = 64$

উত্তর : মোট সংখ্যা : 64টি।

সমস্যা ৬ : 62 এবং 215 এর মধ্যে 3-এর কতগুলো গুণিতক সংখ্যা আছে?

আমাদের জানতে হবে, 62 থেকে 215 পর্যন্ত কতগুলো সংখ্যা রয়েছে যেগুলো 3-এর গুণিতক। অর্থাৎ, এই সংখ্যাগুলো 3 দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায়।

সমাধান

প্রথমে, আমরা দেখি 62 এর পর প্রথম 3-এর গুণিতক কোনটি:

$62 \div 3 = 20.67$, এটি পূর্ণসংখ্যা নয়। তাহলে, পরবর্তী পূর্ণসংখ্যাটি হবে 21, এবং $3 \times 21 = 63$ ।

অর্থাৎ, 63 হলো 62-এর পরে প্রথম 3-এর গুণিতক।

এখন, দেখি 215 এর আগের শেষ 3-এর গুণিতক কোনটি:

- $215 \div 3 = 71.67$, এটি পূর্ণসংখ্যা নয়। তাহলে, পূর্ণসংখ্যা 71 নিলে, $3 \times 71 = 213$ ।

অর্থাৎ, 213 হলো 215-এর আগের শেষ 3-এর গুণিতক।

তাহলে, আমাদের তালিকাটি হলো : 63, 66, 69, ..., 213